

数学强则科技强则国家强

新编考研数学

线性代数精华版（一）

主讲：于伟

大学数学教授

三十余年本科教学与考研辅导经验



一，矩阵：秩，等价，初等变换与初等矩阵；

二，向量组：线性关系，相关、无关，等价；

三，线性方程组：
$$\begin{cases} Ax = 0 & \text{--- 基础解系} \\ Ax = b & \text{--- 解的问题} \end{cases}$$

四，特征值、特征向量，相似对角形；

五，二次型，标准化，规范化

计算：行列式，矩阵的乘法，逆，分块矩阵；初等矩阵，逆，左、右乘；

求极大无关组；方程组的解：基础解系，通解；解矩阵方程；

特征值与特征向量；对角化矩阵；正交矩阵；二次型；

第二章 矩阵理论

直击要点：第一节 初等变换，等价，初等矩阵

1, 矩阵的初等行（列）变换；（各）有三种：

(1) 用非零数 k 乘某行（列）；

(2) 互换两行（列）；

(3) 某行的 k 倍加到另外一行；

--来自于求解方程组的消元法：三种变换都不改变方程组的解！

2 i) 任何矩阵总可以经过初等行变换变换成行阶梯形矩阵或者行最简形矩阵；

ii) 对任意 $m \times n$ 矩阵 A , 总可以经过初等变换把它化为标准型：
$$F_{m \times n} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中 r 是矩阵的秩

3 矩阵的等价(最重要的概念): 若矩阵 A 可以经过有限次(行/列)初等变换化成矩阵 B , 则称 矩阵 A 与 B (行/列) 等价。记为 $A \cong B$ (有些书籍的记法不同)

结论*: 任何一个矩阵 $A_{m \times n}$ 都等价于标准型: $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$

性质: 等价具有对称性(反身性): $A \cong B$, 则 $B \cong A$

传递性: $A \cong B, B \cong C$, 则 $A \cong C$;

4 定理: 设 A, B 都是 $m \times n$ 矩阵,

(1) A 与 B 行等价的充分必要条件是存在 m 阶可逆矩阵 P , 使得: $PA = B$;

(2) A 与 B 列等价的充分必要条件是存在 n 阶可逆矩阵 Q , 使得 $AQ = B$;

(3) A 与 B 等价的充分必要条件是存在 m 阶可逆阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q ,

使得 $PAQ = B$;

5 初等矩阵：如果对单位矩阵 E 进行一次初等（行）变换，则对应有三个初等矩阵：

(i) $E(i(k))$, (第 i 行乘以 k);

(ii) $E(i, j)$, (第 i 行与 j 行互换) ;

(iii) $E(ij(k))$, (第 i 行加上第 j 行的 k 倍);

(iv) 初等矩阵的逆矩阵也是初等矩阵：

$$E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k})); E(i, j)^{-1} = E(i, j); E(ij(k))^{-1} = E(ij(-k))$$

(V) 初等矩阵的转置也是初等矩阵：

$$E(i, j)^{\tau} = E(i, j); E(i(k))^{\tau} = E(i(k)); E(ij(k))^{\tau} = E(ji(k))$$

6 对 $A_{m \times n}$ 实施一次初等行变换, 相当于在 A 的左边乘相应的一个 m 阶初等矩阵: $E(*)A$;

对 $A_{m \times n}$ 实施一次初等列变换, 相当于在 A 的右边乘相应的一个 n 阶初等矩阵: $AE(*)$;

7 1) 任意可逆矩阵 P 都可以写成: $P = P_1 P_2 \dots P_l$ (P_l 是初等矩阵), 即经过初等变换化为单位矩阵;

2) 方阵 A 是可逆阵的充分必要条件是 A 等价于单位矩阵 E 。

8 求逆的方法 (基本功): 对矩阵 $(A; E)$ 只实施行初等变换, 如果前项变成单位阵 E ,

则后项就是 A 的逆矩阵: $P(A, E) = (PA, P)$; 显然, 若 $PA = E$, 则 $P = A^{-1}$

例1 求解矩阵方程 $AX = B$ ，其中 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

解析：而若 A 可逆的话，则 $X = A^{-1}B$ ；

对 (A, B) 进行行初等变换，相当于可逆阵 P 左乘： $P(A, B) = (PA, PB)$

当前面的部分变成单位阵时，即 $PA = E$ ，则 $A^{-1} = P$ ，后面部分就是解： $A^{-1}B$

$$(A \ B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

注：如果 A 不可逆？则可能无解或者有无穷多组解；

求解矩阵方程与后面讲的线性方程组结合起来学习（考点与计算难点）。

要点：第二节 矩阵的 秩

定义：矩阵 A 中最高阶非零子式的阶次（ r ）称为矩阵 A 的秩。

定理：若 矩阵 A 等价于矩阵 B ， 则 $r(A) = r(B)$

推论：若存在可逆阵 P, Q ，使得 $PAQ=B$ ， 则 $r(A)=r(B)$ 。（与可逆阵相乘不改变矩阵的秩！）

*结论：(1) $0 \leq r(A_{m \times n}) \leq \min\{m, n\}$ ；

$$(2) \quad r(A) = r(A^T) = r(AA^T)$$

$$(3) \quad \max\{r(A), r(B)\} \leq r(A, B) \leq r(A) + r(B)$$

$$(4) \quad r(A+B) \leq r(A) + r(B)$$

$$(5) \quad r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$$

$$(6) \quad \text{若 } A \text{ 列满秩, 则 } r(AB)=r(B); \text{ 若 } B \text{ 行满秩, 则 } r(AB)=r(A)$$

$$(7) \quad \text{若 } A_{m \times n} \times B_{n \times l} = 0, \text{ 则 } r(A) + r(B) \leq n;$$

例2 下列矩阵中，可以经过若干次初等行变换得到的矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的是 ()

A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, D. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

解析：利用秩和列向量组的无关：

原矩阵的秩为 2，并且只进行初等行变换，则不改变列向量组的线性关系，前两列线性相关；

$r(A)=3$ ， $r(C)=3$ ，所以都不对，又 D 中矩阵前两列线性无关，所以 B 正确。

$$\text{例3: 证明: } r(A^*) = \begin{cases} n, & \text{若 } r(A) = n \text{ (可逆阵)}; \\ 1, & \text{若 } r(A) = n - 1; \\ 0, & \text{若 } r(A) < n - 1; \end{cases} \quad (A^* \text{ 是 } A \text{ 的伴随矩阵})$$

证明: 若 A 可逆, $AA^*=E$, A^* 也可逆, 所以 $r(A^*)=n$;

若 $r(A) = n - 1$, $|A|=0$, 则 $AA^* = |A|E = O$;

可知 $r(A)+r(A^*) \leq n$; 得 $r(A^*) \leq n-(n-1)=1$;

又 A 至少有一个非零 $(n-1)$ 子式, 则 $r(A^*) \geq 1$, 因此 $r(A^*)=1$.

若 $r(A) < n - 1$ 时, A 的所有 $n-1$ 阶子式都为 0, 所以 $A^* = O$, 则 $r(A^*) = 0$

例4 设 A 为 n 阶方阵, 证明 $r(A+E)+r(A-E) \geq n$

证明: 因为 $r(A+E)+r(E-A) \geq r(2E) = n$, 而 $r(E-A) = r(A-E)$; 得证。

例5 证明若 $A_{m \times n} B_{n \times 1} = C_{m \times 1}$, 且 $r(A) = n$, 则 $r(B) = r(C)$

证: 因 $r(A) = n$, 则知 A 的行最简矩阵 (标准形) 是 $\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}$, 也即有 m 阶可逆阵 P ,

使得 $PA = \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}$. 而 $PC = PAB = \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$; 由 $r(PC) = r(C)$, $r\begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} = r(B)$;

所以 $r(C) = r(B)$.

结论 (知识点): (i) 若有列满秩阵 A 使得 $AB=0$, 则 $B=0$;

(ii) 若有行满秩阵 B 使得 $AB=0$, 则 $A=0$.

例6 证明 $r(A)=1$ 的充分必要条件是存在非零列向量 a 及 b , 使 $A = ab^T$.

证明：充分性：由 a, b^T 非零, 则 $0 < r(A) \leq \min\{r(a), r(b^T)\} = 1$, 所以 $r(A)=1$;

必要性：由 $r(A)=1$, 则存在可逆阵 P 和 Q , 使 $PAQ = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$,

$$\text{记 } P^{-1} = (p_1, p_1 \cdots p_n), Q^{-1} = \begin{pmatrix} q_1^T \\ \vdots \\ q_n^T \end{pmatrix}; \quad A = (p_1, p_1 \cdots p_n) \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1^T \\ \vdots \\ q_n^T \end{pmatrix}$$

则有 $A = p_1 q_1^T$; 由于 P, Q 可逆阵, 所以 p_1, q_1 是非零列向量。

例7 设A, B 为 n 阶实矩阵 , 下列结论不成立的是 ()

$$A. \ r \begin{pmatrix} A & O \\ O & A^{\tau}A \end{pmatrix} = 2r(A); \quad B. \ r \begin{pmatrix} A & AB \\ O & A^{\tau} \end{pmatrix} = 2r(A);$$

$$C. \ r \begin{pmatrix} A & BA \\ O & AA^{\tau} \end{pmatrix} = 2r(A); \quad D. \ r \begin{pmatrix} A & O \\ BA & A^{\tau} \end{pmatrix} = 2r(A)$$

解析: 因为 $r \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B)$; 以及 $r(A^{\tau}A) = r(A)$, 所以 A 正确;

$$r \begin{pmatrix} A & AB \\ O & A^{\tau} \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A & O \\ O & A^{\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & B \\ O & E \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A & O \\ O & A^{\tau} \end{pmatrix} = 2r(A);$$

以及 $r \begin{pmatrix} A & O \\ BA & A^{\tau} \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} E & O \\ B & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O \\ O & A^{\tau} \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A & O \\ O & A^{\tau} \end{pmatrix} = 2r(A)$; 所以 B, D 也都正确。

只有 C 不成立 (有可能大于 $2r(A)$)。 (举例) ###

直击要点，向量组的线性关系

第一节 向量组的线性表示与等价

1 (1) 定义1：线性表示：向量组 $A: a_1, a_2, \dots, a_m$ 和向量 b ,

$$\text{若 } b = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_m a_m \quad (1) \quad x_i \text{ 是常数,}$$

则称向量 b 可由向量组 A 线性表示。

注：这实际上 x_i 是 n 元线性方程组： $AX = b$ 的解； $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$

(2) 定理1：向量 b 能由向量组 $A: a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性表示的充分必要条件是：

矩阵 $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ 的秩与矩阵 $B = (a_1, a_2, \dots, a_m, b)$ 的秩相等；

注：即方程组 (1) 有解； $AX=b$ 有解。 系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩！

线性表示还可以写成：

$$b = (a_1, a_2, \dots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

(3) **定理2**: 若向量组 $B: b_1, \dots, b_l$ 能由向量组 $A: a_1, \dots, a_m$ 线性表示,

$$\text{则 } r(b_1, b_2, \dots, b_l) \leq r(a_1, \dots, a_m)$$

---被表示的组的秩不大于表示组的秩。

(4) **定理2**: 向量组 $B: b_1, b_2, \dots, b_l$ 能由向量组 $A: a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性表示的充分必要条件是:

矩阵 $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ 与矩阵 $(A, B) = (a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_l)$ 的秩相等;

$$\text{即 } r(A) = r(A, B).$$

(5) **结论**: 向量组 $B: b_1, \dots, b_l$ 能由向量组 $A: a_1, \dots, a_m$ 线性表示充分必要条件是:

存在矩阵 K , 使 $B=AK$, 也即 (矩阵) 方程组 $AX=B$ 有解, 也即: $r(A)=r(A, B)$

2 定义2：向量组的等价：

若向量组 $A: a_1, a_2, \dots, a_m$ 与向量组 $B: b_1, b_2, \dots, b_l$ 能互相线性表示，
则称这两个向量组等价。

定理：向量组 A 与向量组 B 等价的充分必要条件是： $r(A) = r(B) = r(A, B)$

注：与矩阵结论不同的是：仅有 $r(A) = r(B)$ 推不出向量组 A 与 B 等价，

比如： $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

例8 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$, 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 等价,

则 λ 的取值范围是 ()

(A) $\{0, 1\}$; (B) $\{\lambda | \lambda \in R, \lambda \neq -2\}$; (C) $\{\lambda | \lambda \in R, \lambda \neq -1, \lambda \neq 2\}$; (D) $\{\lambda | \lambda \in R, \lambda \neq -1\}$

解析: 验证两个向量组等价即验证 $r(A)=r(B)=r(A, B)$ 利用矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} \text{只进行初等行变换} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 & 1+\lambda-\lambda^2-\lambda^3 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda- \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

验证可知 C 正确。

例9: 设 $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix};$

证明向量 b 可由 a_1, a_2, a_3 线性表示, 并求出表示式。

解析: 证明可以线性表示, 则是要证明 $r(a_1, a_2, a_3) = r(a_1, a_2, a_3, b)$

求出表示式, 则是求解线性方程组: $x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 = b$, 即 $AX = b$ 的解;

利用求解线性方程组的方法, 化简增广矩阵: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

可知 $r(A) = r(A, b)$, 所以 b 可由 a_1, a_2, a_3 线性表示;

方程组 $Ax=b$ 的通解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3k+2 \\ 2k-1 \\ k \end{pmatrix}$, 由此可得表达式:

$$b = (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (-3k+2)a_1 + (2k-1)a_2 + ka_3$$

直击要点： 第二节 向量组的线性相关性

定义3： 给定向量组 $A: a_1, a_2, \dots, a_m$ ，若存在不全为零数 $k_1, k_2, \dots, k_m$

使得： $k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots, k_m a_m = 0$ 则称向量组 A 是线性相关的；否则为线性无关。

注1：若向量组线性相关，则其中至少有一个向量可由其他 $(m-1)$ 向量线性表示；

注2：若是两个向量组成的向量组 a_1, a_2 ，则相关意味着成比例， $a_1 = k a_2$ ；

其几何意义是两向量平行；

定理4 向量组 $A: a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性相关的充分必要条件是它所构成的矩阵

$A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ 的秩小于向量组所含向量的个数 m , $r(a_1, a_2, \dots, a_m) < m$ ；

而线性无关的充要条件是 $r(A) = m$. (A 列满秩)

推论1： 向量组 $A: a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性相关的充要条件是：齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解。

推论2： 若构成的矩阵是方阵 A ，且 A 可逆 ($|A| \neq 0$)，则向量组是线性无关的；反之也成立。

定理5 (1) 若向量组 $A: a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性相关, 则向量组 $B: a_1, a_2, \dots, a_m, a_{m+1}$ 也线性相关;

反之, 若向量组 B 线性无关, 则向量组 A 也线性无关。

(2) m 个 n 维向量组成的向量组, 当维数小于向量个数 ($n < m$) 时一定线性相关;

特别地, $n+1$ 个 n 维向量必定线性相关。

(3) 若向量组 $A: a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性无关, 而向量组 $B: a_1, a_2, \dots, a_m, b$ 线性相关, 则向量 b 可由向量组 A 线性表示, 且表示式是唯一的。

(4) (把向量的分量增加个数 (增加维数) 则称为延伸) 如果 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性无关, 则其延伸组也线性无关; 如果延伸组线性相关, 缩短组也线性相关; 反之不成立。

例 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 无关, 则任何延长组也无关, 比如 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ ** \end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ 相关, 则任何缩短组也相关, 比如 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 。

例10 设 $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

验证向量组 a_1, a_2 与向量组 b_1, b_2, b_3 等价。

证明：解析：实际上是证明 $r(A)=r(B)=r(A, B)$ ；

方法：对增广矩阵 (A, B) 只实施初等行变换化成最简形式，再分析：

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{可得 } r(A)=r(A, B)=2$$

容易看出矩阵 $B = (b_1 b_2 b_3)$ 有不为零的二阶子式，所以 $r(B) \geq 2$ ；

又 $r(B) \leq r(A, B) = 2$ ，所以 $r(B) = r(A) = r(A, B)$ 得证。

例11 已知向量组 a_1, a_2, a_3 线性无关, $b_1 = a_1 + a_2, b_2 = a_2 + a_3, b_3 = a_1 + a_3$

试证 向量组 b_1, b_2, b_3 线性无关。

证明: 提示: 有多种证明此类问题的方法, 建议采用下面的矩阵方法:

构造矩阵 $(b_1, b_2, b_3) = (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 记为 $B = AK$;

因为 $|K| \neq 0$, 所以 K 是可逆阵, 则知 $r(B) = r(A) = 3$, 由此得证向量组 B 线性无关。

注: 若两个向量组可写成 $B = AK$ 形式, K 是可逆阵, 则两个向量组的线性关系是一致的,

因为可逆阵 K 相当于一系列初等变换, 而初等变换不改变向量组的相关性。

例12 设向量组 a_1, a_2, a_3 线性相关, a_2, a_3, a_4 线性无关, 证明:

(1) a_1 能由 a_2, a_3 线性表示; (2) a_4 不能由 a_1, a_2, a_3 线性表示

证明: (1) 由 a_2, a_3, a_4 线性无关, 知 a_2, a_3 线性无关;

而 a_1, a_2, a_3 线性相关, 由定理知 a_1 可由 a_2, a_3 线性表示, 且表示式唯一。

(2) 反证法: 若 a_4 可以由 a_1, a_2, a_3 线性表示, 又 a_1 可由 a_2, a_3 线性表示,

则 a_4 也可以由 a_2, a_3 , 这与 a_2, a_3, a_4 线性无关矛盾。

例13 已知直线 $\frac{x-a_2}{a_1} = \frac{y-b_2}{b_1} = \frac{z-c_2}{c_1}$ 与直线 $\frac{x-a_3}{a_2} = \frac{y-b_3}{b_2} = \frac{z-c_3}{c_2}$ 相交于一点,

法向量 $\alpha_i = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{pmatrix} (i = 1, 2, 3)$ 则

A. α_1 可由 α_2, α_3 线性表示; B. α_2 可由 α_1, α_3 线性表示;

C. α_3 可由 α_1, α_2 线性表示; D. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关

解析: 将直线方程写成参数形式: $x = a_2 + a_1t, y = b_2 + b_1t, z = c_2 + c_1t$; 以及

$x = a_3 + a_2t, y = b_3 + b_2t, z = c_3 + c_2t$; 即

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} t$; 以及 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} t$; 两直线相交意味着存在 t_1, t_2 使得

$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} t_1 = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} t_2$; 易知 只有 C 是绝对正确的。

直击要点： 第三节 向量组的秩，极大线性无关组

定义4：设有向量组 $A: a_1, a_2, \dots, a_n$ ，如果在 A 中能选出 r 个向量满足：

(1) $A_r: a_1, a_2, \dots, a_r$ 线性无关；

(2) 向量组 A 中任意 $r+1$ 个向量都线性相关；

(2)*或者向量组 A 中任意向量都可由向量组 A_r 线性表示；

则称向量组 A_r 是向量组 A 的一个极大线性无关向量组（简称极大无关组）

极大无关组所含向量的个数 r 称为这个向量组的秩。

注：若向量组线性无关，则自身就是极大无关组，秩为其所含向量个数 r ；只含 0 向量的秩为 0 。

定理6：矩阵的秩等于它的列向量组的秩，也等于它的行向量组的秩。

注：对矩阵 A , 若 $r(A)=r$, 则 A 有 r 个列向量线性无关，其他列向量都是这 r 个向量的线性组合。

****如何求极大无关组：**

(i) 按列向量形式构造矩阵 A ，然后利用**矩阵方法**，先求出矩阵的秩 r ，

(ii) 再从 A 中找出一个非零 r 阶子式，这个子式所在的 r 个向量就是向量组的一个极大无关组；

因此，一个向量组的极大无关组可能**不唯一**。

例15 已知向量组 $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$

记 $A = (a_1, a_2, a_3, a_4), G = (a_1, a_2)$

(1) 证明: a_1, a_2 是 a_1, a_2, a_3, a_4 的极大线性无关组;

(2) 求矩阵 H , 使得 $A = GH$, 并求 A^{10}

解析(1) 证明 a_1, a_2 是 a_1, a_2, a_3, a_4 的极大无关组, 即是证明 a_1, a_2 线性无关, 且

$r(a_1, a_2) = r(a_1, a_2, a_3, a_4) = 2$; 对矩阵只进行初等行变换:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{易知}$$

$r(a_1, a_2) = r(a_1, a_2, a_3, a_4) = 2$, 所以 a_1, a_2 是极大无关组。

(2) 记 $M = (a_3, a_4)$, 则 $A = GH$ 可写成 $(G, M) = G(E, X)$, 记求 X 使得 $GX = M$ 即可;

观察可得 $a_3 = -a_1 + a_2; a_4 = a_1 - a_2$, 故 $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, 所以 $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

或者 $G^T GX = M$, 则 $X = (G^T G)^{-1} M$

或者 若 $A = GH$, 则 $H = (G^T G)^{-1} GA$;

$A^{10} = GH.GH \dots GH = G(HG)^9 H$; 而 $HG = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $(HG)^9 = \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$(A)^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -8 & -9 & 9 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 10 & -10 \\ -1 & 7 & 8 & -8 \end{pmatrix}$$

直击要点 线性方程组

第一节 线性方程组解的结构

1 (1) 设非齐次 n 元线性方程组为 $A_{m \times n}x = b$ --- (1) ; x, b 都是 n 维向量;

相应的齐次线性方程组为 $Ax = 0$ --- (2) ; $A_{m \times n}$ 称为系数矩阵, (A, b) 为增广矩阵。

性质1: 若 $x = \xi_1, x = \xi_2$ 为齐次方程组的解, 则 $x = \xi_1 + \xi_2$ 也是它的解;

性质2: $x = \xi_1$ 是齐次方程组的解, 则 $x = k\xi_1$ 也是它的解;

性质3: 若 $x = \eta_1, x = \eta_2$ 是非齐次线性方程组的解, 则 $x = \eta_1 - \eta_2$ 是相应齐次方程组的解

2 基础解系的概念: 已知方程组 $A_{m \times n}x = 0$, 其解集合记为 $S = \{x | Ax = 0\}$

齐次方程组的解集合 S 的极大无关组就是这个它的基础解系;

(3) 通解的概念：(i) 设齐次方程组 (2) 的 (一个) 基础解系为 $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_s$;

则其通解为： $x = k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + \dots + k_s \xi_s$;

(ii) 若 η 是非齐次方程组 (1) 的一个特解，则非齐次方程组的通解可表示为：

$$x = k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + \dots + k_s \xi_s + \eta \quad (\text{其中 } \xi_1, \xi_2 \dots \xi_s \text{ 为相应齐次组的基础解系})$$

非齐通 = 齐通 + 非齐特

(4) 方程组 $A_{m \times n} x = b$ ，则 (i) $r(A) \neq r(A, b)$ 方程组无解；

(ii) $r(A) = r(A, b) = n$ 则方程组有唯一解；

(iii) $r(A) = r(A, b) < n$ 方程组有无穷多组解。有解也称为相容。

最重要的基本功：求 $Ax=b$ 的解。 多做题，做完整！

要点：第二节 线性方程组解的理论求解

定理1：设 $r(A_{m \times n}) = r$ ，则 n 元齐次方程组 $Ax=0$ 的解集合 S 的秩为 $(n-r)$ 。-（核心定理）

注1：基础解系含有 $(n-r)$ 个线性无关向量；

注2：任何解集合 S 中的 $(n-r)$ 个线性无关的向量组成的向量组都是方程的基础解系。

推论：非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解集合 S' 的秩等于 $(n-r+1)$ ；（ $r=r(A)$ 。）

其一个极大无关组为： $(\xi_1+\eta), (\xi_2+\eta), \dots, (\xi_s+\eta), \eta$ ；

其中 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ 是齐次组 $Ax=0$ 的基础解系；

***最重要的基本功**（计算能力）：求解线性方程组： $Ax=b$ 的通解

方法：(1) 对增广矩阵 (A, b) 只实施行初等变换，化成最简形，同时可确定 $r(A)=r(A, b)$ ；

(2) 将齐次方程组的基础解系以及特解可同时求出。

关键点是：理解利用增广矩阵与方程组的关系

例1 若 $A_{m \times n} B_{n \times l} = 0$, 则 $r(A) + r(B) \leq n$;

证: 因为 $A(b_1, b_2 \dots b_l) = 0$, 所以 $Ab_i = 0 (i = 1, 2 \dots l)$,

向量组 $B: b_1, b_2 \dots b_l$ 属于 $Ax = 0$ 的解集合;

若 $r(A) = r$, 则 $r(B) \leq n-r$; 由此的结论.

例2 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 元非齐次线性方程组 $AX=b$ 的 3 个不同的解向量, $r(A)=2$, 且满足

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1 + \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ 则 } Ax=b \text{ 的通解为:}$$

解: (利用解的结构, 性质) 因为 $(\alpha_1 + \alpha_3) - (\alpha_1 + \alpha_2) = (\alpha_3 - \alpha_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

由性质知, $(\alpha_3 - \alpha_2)$ 是 齐次方程组 $Ax=0$ 的解;

由于 $r(A)=2$, 所以 $Ax=0$ 的基础解系只含一个向量, 因此其通解为 $\xi = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

又 $A \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2} = \frac{1}{2} A \alpha_1 + \frac{1}{2} A \alpha_3 = b$, 所以 $\frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是非齐次组 $Ax=b$ 的一个特解;

结合起来可得非齐次方程组的通解: $k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

例3 设矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 且 $\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_3 - 2\alpha_4$,
求方程组 $Ax = \alpha_2 + 2\alpha_4$ 的通解。

解析: 非齐次方程组的通解: 齐次方程组的通解 + 非齐次的一个特解

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则 $r(A)=3$, 所以 $Ax=0$ 的基础解系只有一个自由变量 (线性无关向量),

$\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_3 - 2\alpha_4$ 可以写成矩阵形式: $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$, 记 $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

则 ξ 是 $Ax=0$ 的非零解, 由此可以作为基础解系;

又观察 $Ax = \alpha_2 + 2\alpha_4$, 当 $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ 是满足这个方程, 所以这就是非齐次的一个特解;

综合起来, 非齐次方程的通解为: $k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

例4 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，如下哪个也是该方程组的基础解系？

A. $\alpha_1 - \alpha_3, 3\alpha_2 - \alpha_3, 2\alpha_3 - 3\alpha_2 - \alpha_1$; B. $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3$;

解析：此类向量组的线性表示问题基本上都是转化为矩阵形式

$$A. (\alpha_1 - \alpha_3, 3\alpha_2 - \alpha_3, 2\alpha_3 - 3\alpha_2 - \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \text{ 所以不是基础解系};$$

$$(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0;$$

由此向量组线性无关，（因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关）且秩为3，则是一个基础解系。

例5 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a & a \\ 1 & a & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 方程组 $Ax=0$ 的基础解系中含有两个线性无关向量,

求 $Ax=0$ 的通解。

解析: 由题意, $r(A)=4-2=2$; 可以利用行列式先求出 a : 任意的三阶子式必须为 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ 得 } a = 1, \text{ 代入系数矩阵 } A, \text{ 做初等行变换:}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \text{ 原方程化为: } \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

取 x_3, x_4 为自由变量, 分别取 1, 0 和 0, 1 得出:

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 通解为: } x = k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2$$

例6 已知线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - 6x_3 - x_4 = a \end{cases}$$
 当 a 取何值时方程组无解？有解？求通解

解析：判定是否有解：利用 $r(A) = r(A, b)$ ，对增广矩阵做初等行变换

$$(A, b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & -6 & -1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}, \text{ 由此}$$

当 $a \neq -2$ 时，方程组无解；当 $a = -2$ 时，方程组有无穷组解。

且 $r(A)=2$ ，相应的齐次方程基础解系含两个无关的向量：取 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，代入可得

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 非齐次特解为 } \eta = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 非齐通 } k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \eta$$

(写出变换后的同解方程 $\begin{cases} x_1 - 4x_3 + x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$ 再取 x_3, x_4 为自由变量。)

直击要点：第三节 同解，公共解以及综合例题

考研数学经常考察同解，公共解等于线性方程组的解相关联的问题。

1 同解

1) 方程组 $Ax=0$, 与 $Bx=0$ 同解，意味着两个方程组的**所有解**都互相满足方程式；

2) 对线性方程组进行三种**初等行变换**得到的都是**同解**方程组；

或者：在三种初等行变换下得到的方程组都是同解方程组；

3) **结论**： $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解的充分必要条件是 $r(A) = r(B) = r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$

4) $Ax = b$ 与 $Bx = c$ 同解的充分必要条件是 $r(A) = r(B) = r\begin{pmatrix} A & b \\ B & c \end{pmatrix}$

例7 设 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解, 证明 $r(A)=r(B)$.

证明: 由题意, $Ax=0$ 和 $Bx=0$ 有相同的解集, 设为 S , 其秩记为 R_S ;

则 $r(A) = n - R_S = r(B)$.

例8 证明: $r(A^T A) = r(A)$

证明: 只需验证 $A^T Ax=0$ 与 $Ax=0$ 同解即可;

若 x 是 $Ax=0$ 的解, 则 $A^T Ax=0$;

又若 x 是 $A^T Ax=0$ 的解, 则 $x^T A^T Ax = 0, (Ax)^T Ax = 0$, 从而 $Ax = 0$; 得证结论。

例9 设 A 为列满秩矩阵, $AB=C$, 证明线性方程 $Bx=0$ 与 $Cx=0$ 同解。

证明: 若 x 是 $Bx=0$ 的解, 则两边同乘 A , 得 $Cx=0$;

若 x 是 $ABx=0$ 的解, 由于 A 列满秩, 则 A 的行最简形式为 $\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}$, 即存在可逆阵 P ,

使得 $PA=\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}$; $ABx=0$ 两边同乘 P , 得 $\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}Bx=0$; 所以 $Bx=0$.

证法二, 因为 $A_{m \times n}$ 列满秩, 又 $r(A^T A) = r(A) = n$, 所以 $A^T A$ 是可逆阵;

由 $ABx=0$, 得 $A^T ABx=0$, 可知 $Bx=0$.

例10 设方程组
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = a \\ 3x_1 + bx_2 + 3x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + cx_3 + x_4 = -4 \end{cases} \quad (I)$$
 与方程组
$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = -2 \\ x_2 - 2x_3 = 5 \\ x_4 = -5 \end{cases} \quad (II)$$
 同解,

确定 (I) 中的参数 a, b, c 并求通解。

解析: (I), (II) 同解意味着 (II) 的解也都是 (I) 的解;

在 (II) 中, 取 $x_3 = -1$, 得到一个解 $\alpha = (1, 3, -1, -5)^T$, 这也是 (I) 的解,

代入 (I) 可得: $1+6+1-5=a$, $3+3b-3-10=-1$; $1+6-c-5=-5$; 所以 $a=3$, $b=3$, $c=7$;

由于两个方程组同解, 因此只要求出 (II) 的通解即可。

对应 (II) 的齐次组的基础解系为 $\xi_1 = (-3, 2, 1, 0)^T$, 非齐特为 $\eta = (-2, 5, 0, -5)^T$

由此即可得通解。 $x = k\xi_1 + \eta$

2 公共解：指的是某个解向量 x 同时满足两个方程，但并不要求所有的解向量都满足。

方程组 $\begin{cases} Ax = a \\ Bx = b \end{cases}$ 有解，则说明 方程组 $Ax = a$ 与 $Bx = b$ 有公共解。

注：公共解的求法：

(1) 合并两个方程组为新的方程组求解，得出的就是公共解；

(2) 若已知某个方程组的基础解系，则代入另一个方程组即可求出公共解

例11 设线性方程组 (I) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases}$ 与方程组 (II) $x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1$

有公共解，求 a 的值，以及所有的公共解。

解析：即验证方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \end{cases}$ 是否有解。对增广矩阵做初等行变换

可得 $a = 1$, 或 $a = 2$;

$a = 1$ 时，两个方程组的公共解为 $k(-1, 0, 1)^T$;

$a = 2$ 时，两个方程组有唯一公共解： $(0, 1, -1)^T$

例12 设 4 元齐次线性方程组 (I) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$, 以及齐次方程 (II) 的通解为:

$$k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 问方程组 (I) 和 (II) 是否有非零公共解? 若有则求出公共解。}$$

解析: (II) 的解都包含在通解式子里, 若有公共解, 则代入 (I) 应该也成立 (存在某 k_1, k_2)。

$$\begin{cases} -k_2 + k_1 + 2k_2 = 0 \\ k_1 + 2k_2 - k_2 = 0 \end{cases}, \text{ 得 } k_1 = -k_2, \text{ 则向量 } k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 是两个方程组的公共解。}$$

3 满足某个特殊条件的解；多了一个条件

例13 已知 线性方程组：
$$\begin{cases} x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + (2 - \alpha)x_2 + (2 + \beta)x_3 + 4x_4 = 1 \end{cases}$$

且 $(1, -1, 1, -1)^T$ 是该方程组的一个解，

求(1) 方程组的通解； (2) 该方程组满足 $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_3$ 的全部解。

解：将解 $(1, -1, 1, -1)^T$ 代入方程组，可求得 $\alpha = \beta = 1$ ；再代回方程组可得通解为：

$$x = k(-2, 1, -1, 2)^T + (0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)^T ;$$

(2) 求满足 $x_1 = x_3$ 这个条件的解，即把通解中的相关项代入这个方程，求出具体的k 值。

即： $-2k = -k + \frac{1}{2}$, $k = -\frac{1}{2}$, 代入通解的式子即得满足条件的解： $(1, -1, 1, -1)^T$

知识点：三元线性方程组 $A_{m \times 3}X = b$ 有解的几何意义：

(1) 每个线性方程都是 3 维几何空间中的一个平面； $\mathbf{a}_{i1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{i2}\mathbf{x}_2 + \mathbf{a}_{i3}\mathbf{x}_3 = \mathbf{b}_i$ ($i=1, 2, 3$)

(2) $r(A)=r(A, b)=3$ 时的唯一解表示 m 个平面有唯一交点；

(3) $r(A)=r(A, b)=2$ 时，这 m 个平面共直线，直线方程由线性无关的那两个方程组成；

(4) $r(A)=r(A, b)=1$ 时，这 m 个平面共面，这平面是由其中任何一个方程表示的；

(5) $r(A) = 2 \neq r(A, b)$ 时，有两两相交的平面，取决于 A 的行向量；

(6) $r(A) = 1 \neq r(A, b)$ 时，所有平面平行。

注：画图或用实物参考理解

例14：（2024数一） 在空间直角坐标系XYZ 中，三张平面 $\pi_i: a_ix + b_iy + c_iz = d_i (i = 1,2,3)$,

的位置如图所示，记 $\alpha_i = (a_i, b_i, c_i)$, $\beta_i = (a_i, b_i, c_i, d_i)$,若 $r \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = m, r \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = n$

则： A. $m=1, n=2$ B. $m=n=2$ C. $m=2, n=3$ D. $m=n=3$

解：（解析）（这是一个代数与几何的综合题）根据图示，这三个平面共线，因此三个平面方程组成三元一次方程组有**无穷多组解**，由此 $m=n=2$ 。

注：若 $m=n=1$ 则表示三个平面共面，也就是只有一个平面（其余两个可由这个平面表示）；

若 $m=n=3$ 则方程组有唯一解，表示三个平面相交于空间一点。

直击要点：五 特征值，特征向量，相似对角形

第一节 特征值与特征向量

1 1) 定义：设 A 为 n 阶方阵，如果存在数 λ 和 n 维**非零**向量 x ，使得

$Ax = \lambda x$ 则称 数 λ 为 A 的**特征值**，非零向量 x 称为对应于 λ 的**特征向量**。

2) 特征方程： $(A - \lambda E)x = 0$;

注：(1) 特征向量是特征方程的基础解系；其所含向量个数： $n - r(A - \lambda E)$;

(2) $|A - \lambda E| = 0$ 是关于 λ 的 n 次多项式(特征多项式)；

共有（包括复数和重根在内） n 个特征值；

$$|\lambda E - A| = \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})\lambda^{n-1} + (\sum_{i,j} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} + \dots + |A|$$

2 如何求特征值和特征向量（基本功）

(i) 先求 特征多项式（行列式）： $|A - \lambda E| = 0$ ，得到 n 个 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$

(ii) 将 λ_i 代入 $(A - \lambda_i E)x = 0$ ，其基础解系就是 A 的对应 λ_i 的特征向量。

例1 (A) 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量

解： $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2; \quad p_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad p_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(B) 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量

解： $\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2; \quad p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

3 性质 (1) $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$, 特征值之和等于矩阵的迹;

(2) $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = |A|$ 特征值之积等于矩阵的行列式;

(3) A 可逆的充要条件是它的所有特征值都不为 0: $|A| \neq 0 \Leftrightarrow \lambda_i \neq 0$;

(4) 若 λ 是 A 的特征值, 则 λ^k 是 A^k 的特征值; $\varphi(\lambda)$ 是 $\varphi(A)$ 的特征值!

$$\varphi(A) = a_0 E + a_1 A + \dots + a_m A^m$$

注 (知识点): 如果已知矩阵方程 $\varphi(A) = 0$, 则利用 $\varphi(\lambda) = 0$ 求出的 λ_i

是 A 的”可能”和”只能”特征值;

即: A 的特征值只能在这些 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 里面, 但并不是所有的 λ_i 都是 A 的特征值!

例: 若三阶方阵 A 满足 $A^2 - 2A = 0$, 且 $r(A) = 3$, 求出 A 的全部特征值;

解析: A 的特征值只能是 0 和 2; 由 $r(A) = 3$, 则 A 的特征值为 2, 2, 2.

(5) 若 x_1, x_2 是对应同一特征值 λ_i 的特征向量，则其组合 $(c_1x_1 + c_2x_2)$ 也是 λ_i 的特征向量。

定理1： 设 $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_m$ 是方阵 A 的 m 个互不相同的特征值， $p_1, p_2 \dots p_m$ 依次是与之对应的特征向量，则 $p_1, p_2 \dots p_m$ 线性无关。

4 相关结论

(1) 一个特征向量（线性无关性向量）只能对应一个特征值；

但对应同一特征值的特征向量不唯一；（比如 kx 都是特征向量），

(2) 重根特征值可以有多个特征向量，但不超过它的重数；特征向量个数等于 $n - r(A - \lambda_i E)$ ；

(3) 因为 $|A^T - \lambda E| = |A - \lambda E| = 0$ ，所以 A^T 与 A 的特征值相同；

(4) 若 A 可逆，由 $Ax = \lambda x$ 即 $A^{-1}x = \frac{1}{\lambda} x$ ， A^{-1} 的特征值是 A 的特征值的倒数，

且相应的特征向量相同；

例2 (5) 关于 A 的伴随矩阵 A^* 的特征值, 由如下结论:

(i) 如果 $|A| \neq 0$, 则 $|A^*| \neq 0$; 则 $\lambda_i(A^*) = \frac{|A|}{\lambda_i}$ (λ_i 为 A 的某个特征值);

(ii) 若 $r(A) = n - 1$, 则 A^* 只可能有一个非零特征值: $\lambda_1(A^*) = \sum_{i=1}^n A_{ii}$

--所有 $(n-1)$ 阶主代数主子式之和, A^* 的迹;

(iii) 若 $r(A) < n - 1$, 则 $\lambda_i(A^*) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$);

证明: (i) 记 λ_i 与 x_i 分别为 A 的特征值和特征向量, $Ax_i = \lambda_i x_i$, $|A| \neq 0$, 则 $\lambda_i \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

$A^*Ax_i = \lambda_i A^*x_i$, 得 $A^*x_i = \frac{|A|}{\lambda_i} x_i$; 所以 $\lambda_i(A^*) = \frac{|A|}{\lambda_i}$, 且相应的特征向量也相同;

(ii) 由 $r(A) = n - 1$, $A^*A = |A|E = 0$, $r(A^*) = 1$, A^* 中所有 2 阶以上子式都为 0,

则 $|\lambda E - A^*| = \lambda^n - (A_{11} + A_{22} + \dots + A_{nn})\lambda^{n-1}$, 所以最多一个非零解;

(iii) $r(A) < n - 1$ 则 $A^* = O$

例3 三阶矩阵 A 的各行之和为 3；又向量 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是 $Ax=0$ 的两个解；

求 A 的特征值与特征向量？

解析：由行向量之和为 3，即 $\begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} + a_{13} \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow a_1 + a_2 + a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \rightarrow$

$$(a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ 即 } A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

由此 3 是 A 的一个特征值； $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是其对应的特征向量；

又 β_1, β_2 是 $AX = 0$ 的非零解，所以 0 也是 A 特征值，而显然 β_1, β_2 线性无关，

β_1, β_2 皆为对应于 0 的特征向量，由此可知：0 特征值的重数只能为 2；

综合一起， A 的特征值为 3, 0, 0，特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。

要点： 第二节 相似矩阵

考试要求：(i) 理解相似矩阵的概念、性质以及矩阵可相似对角化的充分必要条件；

(ii) 掌握将矩阵化为相似对角矩阵的方法。

1 定义：A, B 为 n 阶方阵, 若存在可逆阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$, 则称 A 与 B 相似; 记为 $A \sim B$;

定义： $P^{-1}AP$ 称为对 A 进行相似变换; P 称为把 A 变成 B 的相似变换矩阵。

2 性质：(1) 反身性：A 与 B 相似, 则 B 与 A 相似;

(2) 递推性：若 A 与 B 相似, B 与 C 相似, 则 A 与 C 相似;

(3) 若 $A \sim B$, 则 A 可逆, B 也可逆, 且 $A^{-1} \sim B^{-1}$; 以及 $A^T \sim B^T$;

(4) 若 $A \sim B$, 设 $f(x)$ 是一个多项式, 则 $f(A) \sim f(B)$;

定理3 若矩阵 A 与 B 相似, 则 A 与 B 的特征多项式相同, 从而 A 与 B 的特征值也相同。

推论: (1) 若 A 与 B 相似, 则两个矩阵的行列式相等: $|A|=|B|$;

(2) 若 A 与 B 相似, 则两个矩阵的迹相等: $trA = trB$;

(3) 若 A 与 B 相似, 则两个矩阵的秩相等: $r(A)=r(B)$;

注: 以上都是矩阵相似的必要条件, 可以用于判别矩阵不相似。但反之不一定成立:

例子: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ A, B 的特征值相同, 但不相似。

推论 (4) 若 A 与如下对角矩阵 Λ 相似, 则 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值:

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

第三节 方阵的相似对角化

1 定理： n 阶方阵 A 与对角阵相似的充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量！

推论1：(充分条件) 如果 n 阶矩阵 A 的 n 个特征值互不相同，则 A 与对角阵相似（可对角化）。

强调：两个矩阵的特征值相同并不一定相似！（反例：重根次数不同）

推论2：矩阵 A 可对角化的充分必要条件是： $r(A - \lambda_i E) = (n - k)$ (λ_i 是 k 重特征根)

或者：矩阵可对角化的充分必要条件： A 的 k 重特征值必对应 k 个线性无关的特征向量。；

思考：为什么有些矩阵相似于/不相似于对角形：（与特征值重根有关！）

2 多学点：如果矩阵不可对角化，其相似于的最简形为若当型。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

三个矩阵的特征值都为1，且都是三重根，但只有 A 相似于的对角形！

B, C都是标准的若当型

结论：任何矩阵都相似于某个若当型。

若当型的形式于矩阵的重根特值所对应的特征向量的个数有唯一的对应关系。

3 如何求相似变换（矩阵） P

如果 A 可对角化，则存在可逆阵 P ，使得 $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{-- (I)}$

记 $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, (I) 式可写成 $A(p_1, p_2, \dots, p_n) = (p_1, p_2, \dots, p_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

则有 $Ap_i = \lambda_i p_i$ ，由特征方程可知， p_i 是对应 λ_i 的特征向量！

步骤：（1）利用 $|A - \lambda E| = 0$ 求出 $\lambda_i (i = 1, \dots, n)$ ；

（2）代入 $(A - \lambda_i E)x = 0$ 求出方程组的基础解系； $p_{i1}, p_{i2}, \dots$

（3）若所有的基础解系个数正好有 n 个，则方阵 A 可相似对角化为对角形 Λ ，

相似变换矩阵 $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$

注意： p_i 与 λ_i 的位置对应。

例4 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & a \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ 相似于对角形 Λ , 试确定 a 的值, 并求可逆阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$.

解析: 求特征值: $|A - \lambda E| = 0$, 可得 $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = \lambda_3 = 6$;

由题意, A 可对角化, 则必须 $r(A - 6E) = 1$, 代入验证可得 $a = 0$;

再求特征向量: 由 $(A + 2E)x = 0$, 可得 $p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$;

由 $(A - 6E)x = 0$ 可得 $p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 令 $P = (p_1, p_2, p_3)$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

例5 设 A 为 3 阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 3 维向量; 且 $A\alpha_1 = \alpha_1$, 又 α_2 是 $Ax = 0$ 的非零解,

$A\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$; 验证 (i) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关; (ii) A 是否可对角化?

解析: $A\alpha_1 = \alpha_1$, 则 α_1 是 A 的相应于特征值 1 的一个特征向量;

α_2 是 $Ax = 0$ 的非零解, 可知 α_2 是 A 的相应于特征值 0 的特征向量。

(i) 设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$ --- (1) (k_i 为常数), 两边同乘 A ,

$\rightarrow k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 + k_3A\alpha_3 = 0; \rightarrow k_1\alpha_1 + k_3(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3) = 0$ --- (2)

(2)-(1) 可得: $k_3\alpha_1 + (2k_3 - k_2)\alpha_2 = 0$, α_1, α_2 属于 A 的不同特征值的特征向量,

所以线性无关;

由此可得 $k_3 = 0, k_2 = 0$, 代入 (1) 得 $k_1 = 0$; 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关。

(i i) 因为 $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 令 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 则P可逆, 记 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

则 $A = PBP^{-1}$, 所以A与B相似; 容易求得 B的特征值为 1, 1, 0; 而秩 $r(B-E) = 2$,

即矩阵 B 对应于重根 $\lambda = 1$ 只有一个线性无关的特征向量, 所以B 不可以对角化,

则 A也不可对角化。

注: 相似矩阵同时可对角化, 或者同时不可对角化。

例6 求解一阶线性微分方程: $\frac{dx_1}{dt} = -2x_1 + x_2 + x_3$, $\frac{dx_2}{dt} = 2x_2$, $\frac{dx_3}{dt} = -4x_1 + x_2 + 3x_3$

解: 把微分方程组写成矩阵形式: $\frac{dx}{dt} = Ax$, 其中 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

A的特征值为 $-1, 2, 2$; 对应的三个特征向量为 $p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

A可对角化, $P = (p_1, p_2, p_3)$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 令 $x = Py$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

则 $\frac{dy}{dt} = P^{-1} \frac{dx}{dt} = P^{-1}Ax = P^{-1}APy$, 由此简化微分方程为:
$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -y_1 \\ \frac{dy_2}{dt} = 2y_2 \\ \frac{dy_3}{dt} = 2y_3 \end{cases}$$

微分方程通解为 $y_1 = c_1 e^{-t}$, $y_2 = c_2 e^{2t}$, $y_3 = c_3 e^{2t}$; 再代回 $x = Py$ 即可!

要点：第四节 实对称矩阵相似对角形

一 正交的概念

定义1（向量正交）： $[x, y]=0$ ，（内积或者数量积）为零，则称向量 x 与 y 相互正交。

定理1：若 n 维向量 $a_1, a_2 \dots a_r$ 是一组两两正交的向量， 则 $a_1 \dots a_r$ 线性无关。

施密特正交化：把基（或者线性无关向量组） $a_1, a_2 \dots a_r$ 单位正交化：

$$\text{令 } b_1 = a_1; b_2 = a_2 - \frac{[b_1, a_2]}{[b_1, b_1]} b_1, \dots b_r = a_r - \frac{[b_1, a_r]}{[b_1, b_1]} b_1 - \frac{[b_2, a_r]}{[b_2, b_2]} b_2 \dots - \frac{[b_{r-1}, a_r]}{[b_{r-1}, b_{r-1}]} b_{r-1}$$

再把 $b_1, \dots b_r$ 单位化： $e_i = \frac{b_i}{||b_i||}$ ，

则 $e_1, e_2 \dots e_r$ 是标准正交基---标准正交化

定义3 (正交阵) : 如果方阵 A 满足 $A^T A = A A^T = E$ ($A^T = A^{-1}$) 则称 A 为正交矩阵。

性质: (1) 方阵 A 是正交阵的一个充分必要条件: A 的列向量都是两两正交的单位向量。

(ii) A 为正交阵, 则 $A^{-1} = A^T$ 也是正交阵; $A^* = |A|A^T$ 也是正交阵;

(iii) 若 A 和 B 都是正交阵, 则 AB , BA 也是正交阵。

定义4 实对称阵, A 的元素都是实数, 且 $A = A^T$

性质1: 实对称矩阵的特征值均为实数。

性质2: 实对称矩阵对应不同特征值的特征向量必互相正交。

证明: 因为 $A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1$, $A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2$ 前一项乘以 α_2^T , 后一项乘以 α_1^T ;

$\alpha_2^T A \alpha_1 = \lambda_1 \alpha_2^T \alpha_1$, $\alpha_1^T A \alpha_2 = \lambda_2 \alpha_1^T \alpha_2$; 由于 A 是对称阵, 且 $\alpha_2^T \alpha_1 = \alpha_1^T \alpha_2$

两式相减可得: $(\lambda_1 - \lambda_2) \alpha_2^T \alpha_1 = 0$ 而 $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$, 由此 α_1, α_2 正交。

定理2 设 A 为 n 阶实对称矩阵，则必有正交矩阵 P ，使得 $P^T A P = P^{-1} A P = \Lambda$ ；

其中 Λ 是以 A 的 n 个特征值为对角元的对角矩阵。（核心定理）

也就是说：实对称矩阵必可对角化，而且还是正交对角化（ P 是正交阵）

推论：实对称阵的 k 重特征值恰好对应有 k 个线性无关的特征向量！ $r(A - \lambda_i E) = n - k$.

例7 已知A是三阶实对称阵,特征值是1,1,2, 其中属于 $\lambda=2$ 的特征向量为 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, 求 A

解: 实对称阵的不同特征值的特征向量相互正交, 设属于 $\lambda=1$ 的特征向量为 $\beta = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,

$\alpha^T \beta = 0$, $x_1 - x_3 = 0$, 可得 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 皆为 $\lambda=1$ 的特征向量,

设 $P = (\alpha, \beta_1, \beta_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 因为 $A(\alpha, \beta_1, \beta_2) = (\alpha, \beta_1, \beta_2) \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

$$A = P \Lambda P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

例8 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix}$, 存在正交变换 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵;

若 P 的第一列为 $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, 求 a 和 P .

解析: 设 $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Ap_1 = \lambda_1 p_1$, 代入运算可得: $\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{5+a}{\sqrt{6}} \\ \frac{4+2a}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$

由此可得 $\lambda_1 = 2$, $a = -1$; 求 $|A - \lambda E| = 0$, 得: $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = -4$;

求解特征方程 $(A-5E)x=0$, 得 $p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $(A+4E)x=0$, 得 $p_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

再将 p_2, p_3 单位化, 即可与 p_1 一起组成正交阵 P .

例9 设 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 为矩阵 $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 3 & a & -1 \\ 4 & -2 & b \end{pmatrix}$ 的一个特征向量;

(1) 求常数 a, b 的值, 以及 α 所对应的特征值;

(2) A 是否可对角化? 可以的话, 对其进行对角化。

解: (1) 因为 $A\alpha = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 3 & a & -1 \\ 4 & -2 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ a+2 \\ b+2 \end{pmatrix}$, 由已知 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是 A 的一个特征向量,

由定义 $A\alpha = \lambda_1\alpha$, 即: $\begin{pmatrix} 3 \\ a+2 \\ b+2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; 可得: $\lambda_1=3, a=b=1$;

(2) 由于 A 已知, 先求 A 的特征值: 可以利用特征方程的性质来求特征值:

设另外两个特征值为 λ_2, λ_3 , 则 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = |A| = 12$, 得 $\lambda_2\lambda_3=4$,

又 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 7$, 得 $\lambda_2 + \lambda_3 = 4$, 所以 $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$;

而 $r(A - 2E) = 2$, 即 $(A - 2E)x = 0$ 基础解系只含一个向量; 由此可知 A 不可对角化。

直击要点 六 二次型

一， 概念与理论：

定义1 含有n个变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的二次齐次函数，称为二次型：

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots$$

$$= x^T A x \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad A = A^T \quad (\text{二次型矩阵})$$

定义2 若二次型中只含平方项，则称此二次型为**标准形**，即

$$f(X) = x^T A x = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$$

若平方项的系数 λ_i 只为 1, -1, 0, 则称二次型为**规范形**

定义3 实对称阵 A称为二次型 $f(x)$ 的矩阵，矩阵A的秩就是二次型的秩。

定义4 设 A 和 B 是 n 阶矩阵, 若存在可逆阵 C , 使得 $B=C^TAC$, 则称矩阵 A 与 B 合同。

显然, 若矩阵 A 和 B 合同, 若 A 是对称阵, 则 B 也是对称阵, 且 $r(A)=r(B)$

注: “合同”并不限于对称阵; 考研数学目前只讨论对称阵的合同问题。

合同的性质: (1) 对称性, A 与 B 合同, 则 B 与 A 也合同;

(2) 传递性: 若 A 与 B 合同, B 与 C 合同, 则 A 与 C 合同;

定义5 二次型的合同变换: 若存在可逆阵 C , 使得 $X=CY$, 使得二次型变为

$$f = X^TAX = (CY)^TACY = Y^TC^TACY = Y^TBY$$

****** 研究二次型的主要目的是寻找可逆变换 $x = Cy$,使得二次型变成标准形或规范形。

要点二，化二次型为标准形以及规范

一， **定理3**：任给二次型 $f = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$ ($a_{ij}=a_{ji}$)，总有正交变换 $x = py$,

使 f 化为标准形： $f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$ (核心定理)

其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 是 f 的矩阵 $A = (a_{ij})$ 的特征值。

证明：利用上节的定理5即可得此结论。

推论：总有可逆变换 $x = Cz$, 使 $f(Cz)$ 为规范形： $f = z_1^2 + z_2^2 + \dots - z_r^2 - \dots z_l^2$

****证明：**

注：正交变换可将二次型化为标准形；可逆变换则可将二次型化为规范形；但都是合同变换。

矩阵语言是：实对称阵通过正交变换可合同于标准形；通过可逆变换可合同于规范形。

由于正交阵 $P^T = P^{-1}$ ，合同于标准形也相当于相似于标准形。（但不是相似于规范形）

注：可以利用**配方法**将二次型化为规范形或者标准形；其采用的变换 $x = Cy$ 一般是可逆变换（非正交变换），因此**所得标准形的系数**不见得是特征值；但是**惯性指数**是相同的。

例1 求正交变换 $X=PY$ ，把二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_2x_3$ 化为标准形。

解析：先写出二次形矩阵： $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ；

再求特征值 $|A - \lambda E| = 0$ ，得到 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$ ；

再求相应的特征向量： $\lambda_1 = 1$ 时， $\lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$ 分别代入 $(A - E)x = 0$,

解得三个特征向量： $p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ， $p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ， $p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

由于特征值不相同，因此三个特征向量正交，分别单位化，即可得正交变换

$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ；最终得到的标准形为 $f = y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$

例2 问方程 $f(x, y, z) = 3x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 4xz - 10yz = 1$ 表示哪种二次曲面？

解析：将方程化为标准形式。

方程前面的表达式是个二次型，二次型矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -5 \\ -2 & -5 & 5 \end{pmatrix}$,

求其特征值，由 $|A - \lambda E| = 0$ 得三个特征值为 0, 2, 11,

利用正交变换, 方程可转换为: $2v^2 + 11w^2 = 1$, 表示椭圆柱面。

$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; P 是正交变换矩阵。

二，利用配方法化二次型为标准形

例3 设二次型为 $f = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3$ ，试将其化为标准形。

解析： $f = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2$ ；

令 $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 - x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$ 则标准形为 $f = (y_1)^2 + (y_2)^2$ ；

可逆变换矩阵： $X=PY$ ， $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ， $|P| \neq 0$ 。

注：此二次型矩阵的特征值为 $0, 1, 3$ ；由此可逆变换得到的标准形，其系数并不是特征值；

但是两者的惯性指数一样！

要点 三 正定矩阵与二次型

一，定义5 设二次型 $f(x) = x^T A x$ ，如果对于任何 $x \neq 0$ ，都有 $f(x) > 0$ ，则称 f 为正定二次型。

并称对称矩阵 A 为正定矩阵。

如果对于任何 $x \neq 0$ 都有 $f(x) < 0$ ， 则称 f 为负定二次型， A 为负定的。

定义6(惯性指数) 二次型标准形中正系数的个数称为二次型的正惯性指数；

负系数的个数为二次型的负惯性指数。

定理7 (惯性定理) 设二次型 $f = x^T A x$ 的秩为 r ， 且有两个可逆变换 $x = Cy, x = Pz$

使得 $f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_r y_r^2$ 以及 $f = k_1 z_1^2 + k_2 z_2^2 + \dots + k_r z_r^2$,

则 $\lambda_1 \dots \lambda_r$ 中正数的个数与 $k_1 \dots k_r$ 中正数的个数相等。

注：也就是说可逆变换不改变惯性指数。因此正交变换和合同变换都不改变惯性指数！

二, 定理8 二次型 $f = x^T A x$ 为正定的充分必要条件是:

A. 它的标准形的 n 个系数全为正;

B. 即它的规范形 n 个系数全为1;

C. 正惯性指数等于 n .

推论: 对称矩阵 A 为正定的充分必要条件是: A 的特征值全为正。

推论: 若 A 是正定矩阵, 则 $-A$ 是负定矩阵; 因此负定矩阵的特征值全为负。

注: 若特征值都非负, 则为半正定阵。

定理9 (赫尔维茨) 对称矩阵 A 为正定矩阵的充分必要条件是: A 的各阶主子式都为正, 即:

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots \quad |A| > 0 .$$

对称矩阵 A 为负定的充分必要条件是: 奇数阶主子式为负, 偶数阶主子式为正:

$$a_{11} < 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \dots \quad |A| \quad (\text{偶数阶次矩阵大于零, 奇次小于零})$$

三，性质：若 A, B 都是 n 阶实正定阵，则

(i) 对任意实数 $k > 0, l > 0, kA + lB$ 也是正定阵；

(ii) A^m, A^{-1}, A^* 也都是正定阵；

证明：(i) 利用定义，因为 A, B 都是正定阵，则对任给的 n 维向量 x ，有

$$x^T A x > 0, x^T B x > 0; \text{ 可得 } x^T (kA + lB) x = kx^T A x + lx^T B x > 0$$

结论得证！

(ii) 利用特征值证明即可。

注： A, B 都是正定阵，但 AB 不一定是正定阵。

甚至 A, B 都是对称阵，但 AB 不一定是对称阵！

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; AB = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

例4 设实对称阵 A 满足 $A^2 - 3A + 2E = O$, 证明 A 是正定矩阵。

证明：法一，设 A 的特征值为 λ , 则 λ 满足方程 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, 得

$\lambda = 1, 2$; 由此知 A 的特征值只能是 1, 或者 2. 所以 A 是正定阵。

法二，因为 $A = \frac{1}{3}(A^2 + 2E)$, 则对任意的非零向量 x , 二次型

$$x^T A x = \frac{1}{3} x^T (A^2 + 2E) x = \frac{1}{3} (x^T A^2 x + 2x^T x) > 0, \quad \text{所以 } A \text{ 也是正定阵。}$$

例5 设 A 是三阶实对称阵，且满足 $A^2 + 2A = O$ ，已知 $r(A)=2$ ，试求

(1) A 的全部特征值；

(2) 当 k 为何值时， $A+kE$ 为正定矩阵。

解：(1) 由 $A^2 + 2A = O$ 可知 A 的特征值只能是 0 和 -2；

又 $r(A)=2$ 且 A 是对称阵，则 0 只能是单根特征值，由此全部特征值为 0, -2, -2；

注：证明为什么 0 只能是单根特征值；由 A 是对称阵，则必存在 P ，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$ ，

Λ 是主对角线为特征值的对角形阵；若 0 是重根特征值，则 $r(A)=r(\Lambda)=1$ ；矛盾。

(2) 由 $\lambda(A+kE)=\lambda(A)+k$ ，可知 $k>2$ 即可保证 A 是正定阵。

注：由 $|\lambda E - (A + kE)| = |(\lambda - k)E - A| = |\mu E - A| = 0$ ；得出 $\mu = \lambda(A)$ ；

$\mu = \lambda - k$ ，所以 $\lambda(A + kE) = \mu + k = \lambda(A) + k$ 。

直击要点 七 向量空间

1 定义1:向量空间（从集合到空间）：设 V 为 n 向量的集合，若集合 V 对于向量的加法和数乘两种运算封闭，则称集合 V 为向量空间。

定义2: 基：设 V 为向量空间，如果 r 个向量 $a_1, a_2, \dots, a_r \in V$ ，且满足：

(1) $a_1, a_2, \dots, a_r$ 线性无关；

(2) V 中任一向量都可由 $a_1, a_2, \dots, a_r$ 线性表示

则称 $a_1, a_2, \dots, a_r$ 为向量空间 V 的一个基， r 称为向量空间 V 的维数， V 是 r 维向量空间。

注：基就是 V 的一个极大无关组，也不唯一。但维数=秩，是唯一的。

定义3:坐标：如果在向量空间 V 中取定一个基 $a_1, a_2, \dots, a_r$ ， V 中任一向量可唯一地表示为：

$x = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots, x_r a_r$ ，则数组 $(x_1, x_2, \dots, x_r)$ 称为向量 x 在基 $a_1, a_2, \dots, a_r$ 上的坐标。

特别， n 维向量空间 R^n 中取单位坐标向量 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 为基（自然基），则向量 x 的分量就是坐标。

定义4：设 $e_1, e_2 \dots e_r$ 是 n 为向量空间 V 的一个基，若 $e_1, e_2 \dots e_r$ 两两正交，且都是单位向量，
则称 $e_1, e_2 \dots e_r$ 是 V 的一个标准正交基。

定义5：由向量组生成的空间： $L = \{x = k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_m a_m | k_i \in R\}$

则称 L 为由向量组 $a_1, a_2, \dots a_m$ 生成的向量空间；

且 向量组的秩等于空间的维数；向量组的极大无关组就是空间的基。

定义6：自然基： n 维空间中取单位坐标向量组生成的基 $e_1, e_2 \dots e_r$,

比如三维向量空间中的自然基： $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

例1 (1) n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解集合构成向量空间, 称为解空间: $S = \{x | Ax = 0\}$

因为任给 x_1, x_2 属于 S , 有 $kx_1 + lx_2$ 都仍然属于 S 。

(2) 非齐次线性方程组的解集 $S' = \{x | Ax = b\}$ 则不是向量空间。

因为任给 x_1, x_2 属于 S' , $x_1 + x_2$ 不属于 S' 。

例2 设 $A = (a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = (b_1, b_2) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

(1) 试证 a_1, a_2, a_3 是 3 维向量空间 R^3 的一个基;

(2) 求 b_1, b_2 在整个基中的坐标;

解析: (1) 只要验证 a_1, a_2, a_3 线性无关就可知它是 R^3 的一个基;

易知 $|A| \neq 0$, 所以是基。

(2) 求下列在基中的坐标, 即是求线性表示式: $(b_1, b_2) = (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix}$

解矩阵方程: $B = AX$, $X = A^{-1}B$, 对 (A, B) 进行初等行变换

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}; \text{ 后两列即是 } b_1, b_2 \text{ 的坐标。}$$

要点 2 基的过渡矩阵与坐标变换

定义6 过渡矩阵：不妨取 R^3 中的一个基 a_1, a_2, a_3 ，再取另一个新基 b_1, b_2, b_3 ，

存在可逆阵 P ，使得 $(b_1, b_2, b_3) = (a_1, a_2, a_3)P$ ，则称 P 为从旧基到新基的过渡矩阵。

解析：记 $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ ； 则

$$(a_1, a_2, a_3) = (e_1, e_2, e_3)A, \quad (e_1, e_2, e_3) = (a_1, a_2, a_3)A^{-1}; \quad \text{则}$$

$$(b_1, b_2, b_3) = (e_1, e_2, e_3)B = (a_1, a_2, a_3)A^{-1}B; \quad \text{由此得到基变换公式：}$$

$$(b_1, b_2, b_3) = (a_1, a_2, a_3)P; \quad \mathbf{P} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \text{ 称为从旧基到新基的过渡矩阵。}$$

定义7 坐标变换公式：向量 x 在旧基和新基中的坐标分别为 y_1, y_2, y_3 和 z_1, z_2, z_3 ；即

$$x = (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad x = (b_1, b_2, b_3) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix};$$

$$\text{可得} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = B^{-1}A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

就是从旧坐标到新坐标的坐标变换公式； P^{-1} 可以称为坐标变换（矩阵）。

- 如何求矩阵 P ：利用初等行变换求过渡矩阵 $P = A^{-1}B$

对 (A, B) 进行初等行变换，相当于左乘一个可逆阵 Q ； $Q(A, B) \rightarrow (QA, QB)$ ；

当 $QA=E$ 时，即 $Q = A^{-1}$ ，则 $QB = A^{-1}B$ ，即后面的分块矩阵即为过渡矩阵。

例3 已知 R^3 两个基为 $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

(1) 求由前基到后基的过渡矩阵;

(2) 若向量 x 在前基的坐标为 $\alpha = (1, 1, 3)^T$, 求它在后基的坐标。

解: 初等行变换 $(A \ B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (E \ P);$

P 即为过渡矩阵;

在后基的坐标 $\beta = P^{-1}\alpha = (-8, -1, 5)^T$.

Thank you

经纬考研数学 www.jingweimath.com