

数学强则科技强则国家强

新编考研数学

线性代数基础 (一)

主讲：于伟

大学数学教授

三十余年本科教学与考研辅导经验



数学强、则科技强、则国家强

新编考研数学线性代数(基础篇)

经纬数学

www.jingweimath.com

目录：

1 综述

2 线性方程组基础

3 矩阵基础

矩阵的基本运算

行列式

4 向量基础

1 综述

1) 重要的基本概念

- * 矩阵：矩阵的秩，矩阵的初等变换与初等矩阵，矩阵的等价；
- * 向量组：向量组的线性表示，线性相关与无关，向量组的等价；

** 线性方程组：
$$\begin{cases} Ax = 0 & \text{--- 基础解系} \\ Ax = b & \text{--- 解的问题} \end{cases}$$

- * 特征值、特征向量，相似于对角形；
- * 二次型，正交变换，合同变换，标准形，规范形，正定矩阵；
- * （数一）向量空间：空间的基，基变换，坐标，坐标变换。

2) 计算 (基本功)

- * 计算行列式, 性质, 以及按行 (列) 展开;
- * 矩阵的乘法, 求逆, **分块矩阵**, 求矩阵的秩; 初等矩阵, 伴随矩阵等相关问题;
- * 向量组: 求极大无关组, 向量的线性表示, 判别线性相关性;
- ** 求解方程组的解: 基础解系, 通解, 特解, 同解, 公共解;

求解矩阵方程 $AX = B$

- ** 求特征值与特征向量, 对角化矩阵;
- * 二次型: 求正交变换 (矩阵) 化二次型维标准形;

合同变换 (可逆矩阵) 化为规范形;

正定二次型与矩阵矩阵的判别法。

第一章 基础篇

第一节 方程组初步

例1 求解二元一次线性方程组：1) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$;

例2 求解三元一次线性方程组：(1) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

解法：（1）某个方程乘以 k 倍； （2）交换两个方程；

（3）某个方程加（减）另一个方程的 k 倍；

注：如上的三种方法都不改变方程组的解——线性变换；

例3 1) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases};$

2) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$

例4 1) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 8 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$

结论：线性方程组求解可能出现的三种情形：

1) 唯一解； 2) 有无穷多组解； 3) 方程组无界。

线性代数的核心问题就是研究这三种情形所对应方程组的共性，以及求解方法。

第二节 矩阵基础

一, 基本定义: 矩阵: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 记 $A_{m \times n}$, m 行 n 列, $m \times n$ 个元素;

$m = n$ 称为 n 阶方阵; 列向量: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 可以称为 3×1 阶矩阵。

单位矩阵, 对角矩阵, (上)三角矩阵: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$;

可逆矩阵, 对称矩阵, 正定矩阵; 初等矩阵,

二，矩阵的基本运算：1) 加减，与数相乘；

2) 矩阵的相乘： $A_{m \times n} B_{n \times l} = C_{m \times l}$

例5：设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 求 $2A + 3B$, AB , BA , AC

注： AB 与 BA 不一定相等(不满足交换律)；若 $AB = BA$ ，则称 A , B 是可交换的；

3) 转置矩阵 A^T ，对称矩阵： $A^T = A$

三，方阵的行列式：
$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1) 是个具体的数值，由 $n!$ 项生成，取自不同行与不同列的元素乘积；

2) 行列式的性质：i) 交换两行，则行列式变号；

ii) 若某行（列）有相同数值可以提取到行列式外；

iii) 行列式的某行（列）加上另外一行（列）的 K 倍，行列式不变。

3) 行列式的按行（按列）展开： $D = a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in}$ ；

定义：余子式 M_{ij} ：划掉第 i 行，第 j 列后的子行列式；代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$

且有 $a_{i1}A_{j1} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \ (i \neq j)$

例5 (1) 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$, 并求 a, b 为何值时, $D = 0$?

例6 记 $D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, 求 $A_{21} + A_{22} + A_{23} + A_{24}$

例7 若 $\begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda - 5 & 5 \\ 2 & 5 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = 0$, 求 $\lambda = ?$

四, 矩阵的逆: 若有 $AB = BA = E$ 则称 A 为可逆的, 记为 A^{-1}

(i) 方阵 A 可逆的充分必要条件是行列式 $|A| \neq 0$

(ii) 伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$, A_{ij} 为 A 的代数余子式

$$A^*A = |A|E; \quad \text{若 } |A| \neq 0, \quad \text{则 } A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$$

例8 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

(iii) (1) $|A^*| = |A|^{n-1}$; (2) $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$; (3) $(kA)^* = k^{n-1} A^*$; (4) $(A^*)^* = |A|^{n-2} A$

五, 分块矩阵

$$1) A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_1 \quad a_2 \cdots a_n), \text{ 其中 } a_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} (i = 1, 2, \dots, n);$$

$$2) n \text{ 元方程组的矩阵形式: } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}; A \text{ 为系数矩阵, } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ 为解向量, } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix};$$

$$\text{或者: } x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots x_n a_n = b$$

$$3) \text{ 记 } \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, P = (p_1, p_2, \dots, p_n); \text{ 若 } AP = P\Lambda, \text{ 则有}$$

$$A(p_1, p_2, \dots, p_n)_{1 \times n} = (p_1, p_2, \dots, p_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}; \text{ 可得: } Ap_i = \lambda_i p_i$$

六 分块矩阵的运算

** 拉普拉斯公式: $\begin{vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A||B|$; $\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & * \end{vmatrix} = (-1)^{nm}|A||B|$; 其中 $A_{n \times n}, B_{m \times m}$

例9 求分块矩阵, 将 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 化为上(下)三角分块矩阵; 其中 A, B 都是 n 阶可逆阵。

解: 验证 $X = \begin{pmatrix} E & -A^{-1}B \\ 0 & E \end{pmatrix}$, 则有 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & -A^{-1}B \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$;

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

例10 已知 $A^2 + 3A - E = 0$, 求用 A 表示 $(A + E)^{-1}$

解: $A^2 + 3A - E = (A + E)(A + 2E) - 3E = 0$, 即 $(A + E)(A + 2E) = 3E$

所以 $(A + E)^{-1} = \frac{1}{3} (A + 2E)$.

七 方程组的克莱姆法则：记 $Ax = b$, A 是方阵，且 $D = |A| \neq 0$, 则有

$$x_i = \frac{D_i}{D}, \quad x_i \text{ 是解向量的第 } i \text{ 个分量, } D_i \text{ 是 } |A| \text{ 中用 } b \text{ 换掉第 } i \text{ 列后的行列式。}$$

例11 求解线性方程组：

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

解： $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4,$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6; \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2; \quad D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

所以 $x_1 = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$; $x_2 = -\frac{1}{2}$; $x_3 = 0$;

第三节 向量基础

- 1 定义：n 维向量： $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ ； 分量个数等于维数；
- 2 向量的运算， 加、减、与数相乘；
- 3 向量的内积（数量积）： $[x, y] = x^T y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$
- 4 向量的相等： $x = y \leftrightarrow x_i = y_i$ 分量分别相等。
- 5 向量的模： $\|x\| = \sqrt{x^T x} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$
- 6 单位向量： $\|x\| = 1$;
- 7 两个向量正交： $x^T y = 0$;
- 8 两个向量平行： $x = k y$; $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \dots = \frac{x_n}{y_n} = k$;
- 9 两向量的乘积：看成矩阵相乘。

例12 设 $\alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; $A = \alpha\beta^\tau$, 求 A^3 , A^n

解：分析：A 是由两个向量生成的 3X3 矩阵，（一般以列向量的形式表示向量）

$$A = \alpha\beta^\tau = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \alpha\beta^\tau\alpha\beta^\tau; \quad \text{而 } \beta^\tau\alpha = (1,0,2)\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 5;$$

$$\text{所以 } A^2 = 5\alpha\beta^\tau = 5A, \quad A^3 = A^2A = 5A^2 = 25A = 25\begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^n = (\alpha\beta^\tau)^n = \alpha(\beta^\tau\alpha)\dots(\beta^\tau\alpha)\beta^\tau = \alpha(\beta^\tau\alpha)^{n-1}\beta^\tau = 5^{n-1}\alpha\beta^\tau$$

注： $\beta^\tau\alpha$ 是个数量，与矩阵 $\alpha\beta^\tau$ 的主对角线之和相等！

本课程的其他部分都发布在经纬考研数学的网站 www.jingweimath.com

“网课视频” →→ “新编考研数学线性代数精华版”；

以及配套练习题在“经纬研选” →→ “线性代数”

Thank you