

考研数学线性代数综合习题

经纬考研数学

www.jingweimath.com

高分必备

综述：考研数学的线性代数部分考察的也是考生的三基水平：

基本概念，基础理论，基本计算。

综合练习题旨在帮助大家提升对基本概念和理论严谨细致的理解；强调解题思路，和解题方法；题目研选，面向考试的题型，全面提高考生解决问题的能力。

题目适合有些基础的考生强化提高！

在此先将线性代数中的几个**重要**的基本概念提出来，便于复习时有的放矢，纲举目张：

线性代数的纲就是：**线性方程组**

矩阵：秩，初等变换与初等矩阵，等价；

向量组：线性关系，相关、无关，等价；

线性方程组：
$$\begin{cases} Ax = 0 & \text{--- 基础解系} \\ Ax = b & \text{--- 解的问题} \end{cases}$$

特征值、特征向量，相似对角形；

二次型，标准化，规范化

计算：行列式，矩阵的乘法，逆，分块矩阵；初等矩阵，逆，左、右乘；

求极大无关组；方程组的解：基础解系，通解；解矩阵方程；

特征值与特征向量；对角化矩阵；正交矩阵；二次型；

1 记 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, A_{ij} 为 A 的代数余子式, 求 $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 A_{ij}$

2 设 A 是 3 阶正交矩阵, $|A|=2$, 若 $|2A+B|=4$, 求 $|E + \frac{1}{2} AB^T|$

3 已知 a_1, a_2, a_3, a_4 是 3 维列向量; 记矩阵 $A = (a_3, a_2, a_1)$, $B = (a_1 + 2a_2, a_2 + 2a_4, a_4)$

$C = (a_1, a_2, 2a_3 - a_4 + a_2)$, 若 $|A| = 2, |B| = -8$, 求 $|C|$

4 设 A 是元素全为 1 的 n 阶矩阵, (1) 求 $|aE + bA|$

(2) 若 $1 < r(aE + bA) < n$, 确定 a, b 满足的条件; 并求 $W = \{x | (aE + bA)x = 0\}$ 的维数。

5 A, B 分别是 $n \times m$ 和 $m \times n$ 矩阵, 证明 (1): $\begin{vmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix} = |E_n - AB| = |E_m - BA|$,

(2) 设 $\lambda \neq 0$, 证明: $|\lambda E - AB| = |\lambda E - BA|$

例6 若 A 是 n 阶实方阵, 证明: $A^T A = 0$, 则有 $A = 0$

例7 设 A 是 n 阶可逆矩阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, 证明 $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$

8 设向量组 a_1, a_2, a_3 线性无关, 判定下列向量组的线性相关性:

1) $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_1 + a_2 + a_3$; 2) $a_1 - a_2 + 2a_3, a_2 - a_3, 2a_1 - a_2 + 3a_3$;

9 设 a_1, a_2 为两个线性无关的三维向量, b_1, b_2 是与 a_1, a_2 均正交的三维非零向量,

证明: (1) b_1, b_2 线性相关; (2) a_1, a_2, b_1 线性无关。

10 设 A 是三阶非零矩阵, 且满足 $A^2 = 0$, 若线性方程组 $Ax = b$ 有解, 则其线性无关解向量个数为多少?

11 设 A 为 n 阶方阵,

问 (1) A 满足什么条件时, 存在 n 阶方阵 B (不等于单位阵 E), 使得 $AB = A$?

(2) 当 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ 时, 求所有的方阵 B 使得 $AB = A$.

12 设 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 为矩阵 $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 3 & a & -1 \\ 4 & -2 & b \end{pmatrix}$ 的一个特征向量;

(1) 求常数 a, b 的值, 以及 α 所对应的特征值;

(2) A 是否可对角化? 可以的话, 对其进行对角化。

13 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, 已知 A 有3个线性无关的特征向量; $\lambda=2$ 是 A 的二重特征值。

求 x, y 以及可逆阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角型。

14 设 3 阶矩阵 A 的各行元素之和为 2, 向量 $\beta_1 = (1, 2, 0)^T$, $\beta_2 = (0, 1, -1)^T$

是线性方程组 $Ax = 0$ 的两个解。

求 (1) A 的特征值和特征向量; (2) 求正交阵 Q , 使得 $Q^T A Q = \Lambda$.

15 设 3 阶对称矩阵 A 的特征值为 1, 2, -2, $\alpha_1 = (1, -1, 1)^T$ 是 A 的属于 $\lambda_1=1$ 的特征向量;

记 $B = A^5 - 4A^3 + E$; 验证: α_1 是 B 的特征向量, 并求 B 的全部特征值与特征向量。

16 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$ 的秩为2;

求: (1) a 的值; (2) 求正交变换 $x = Qy$, 把 f 化成标准形; (3) 求方程 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解。

17 设 $A = E - 3\alpha\alpha^\tau$, 其中 α 是个三维列向量, 且 $\alpha^\tau\alpha = 1$, 则 A 是否可逆? 是否正定阵?

18 设 A 是三阶实对称阵, 满足 $A^3 + A^2 + A = 3E$, 若 $kA + E$ 是正定阵, 则 k 的取值范围?

19: 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与二次型 $x^T B x = 3x_1^2 + ax_3^2$ 的矩阵 B 合同, 则 a 的取值范围?

20 设矩阵 A 是 n 阶实对称阵, 且 $A^2 = A$, $r(A) = r$ ($0 < r < n$); 证明 $E + A$ 是正定矩阵;

且 计算 $|E + A + A^2 + \dots + A^k|$

21 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + ax_3^2 + 2x_2x_3$ 经正交变换可化为标准形 $y_1^2 + by_2^2 - y_3^2$,

求 a, b 的值?

22 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$; (1) 求 a 的值; (2) 利用正交变换将 f 化为标准形

23 三元二次型的矩阵 A 满足 $A^2 - 2A = 0$, 且 $\alpha_1 = (0, 1, 1)^T$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系;

(1) 求二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的表达式;

(2) 若二次型 $x^T(A + kE)x$ 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 求 k 的值。

24 A 是 n 阶矩阵, 且满足 $A^2 + 2A = 3E$

(1) 证明 $r(A-E) + r(A+3E) = n$; (2) A 可对角化; (3) 如果 $r(A-E) = r$, 求行列式 $|A+E|$

25 设 3 阶矩阵 A 满足: $A^3 - A^2 - 2A = 0$, 且 A 不可对角化,

问如下那个组合不可能是 A 的特征值 "

- (1) 2,2,-1 (2) -1, -1, 2; (3) 2, 0, -1 (4) 2,2, 2.

26 已知 3 阶矩阵满足: $A^2 = 2A$, 且 $r(A)=2$, 证明 A 可对角化。

27 设 A 是三阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 维线性无关的向量, 且:

$$A\alpha_1 = \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3, A\alpha_2 = \alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3, A\alpha_3 = \alpha_3$$

- (1) A 是否可对角化: (2) 求 $(A-E)$ 的秩。

28 设 A 是 3 阶矩阵, $r(A)=1$, 则对特征值 $\lambda=0$, 如下正确的是 ()

- (1) 必是 A 的二重特征根 (2) 至少是 A 的二重特征根
(3) 最多是 A 的二重特征根; (4) 可能是 A 的一, 二, 三重特征根

29 设 A 是 n 阶矩阵, $|A|=1$, 若 $A+E$ 不可逆, 则 A 的伴随矩阵 A^* 必有特征值 ()。

30 设 A 为 3 阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 维非零向量, 其中 $A\alpha_1 = \alpha_2, A\alpha_2 = \alpha_3, A\alpha_3 = 0$

- (1) 验证 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关; (2) 求矩阵 A 的特征值和特征向量

31 已知 A 是 3 阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是三维线性无关的列向量, 若

$$A\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad A\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_3, \quad A\alpha_3 = \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3, \quad \text{求 } |A^*|$$

32 设 A 为 $m \times n$ 阶矩阵, 则 $m < n$ 是方程 $A^T A x = 0$ 有非零解的 ()。

(A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件 (C) 充分必要条件 (D) 即非充分也非必要

33 n 阶矩阵 A 和 B 具有相同特征值是 A 与 B 相似的 () 条件?

1 充分必要 2 必要非充分 3 充分非必要 4 既非充分也非必要

34 设 a, b 是三位单位正交列向量, 则二次型 $f = x^T(2aa^T + bb^T)x$ 的规范形为 ()

A. $y_1^2 + y_2^2$; B. $y_1^2 - y_2^2$; C. $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$; D. $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$;

35 对 n 阶矩阵 A 和 B , 下列正确的是 ()

1 若 A 和 B 有相同的特征值, 则 A 和 B 相似;

2 A 的特征值中非零特征值的个数与 A 的秩相等

3 若 $A = \alpha\beta^T$, α, β 为列向量, 则 A 相似于对角形;

4 若 A 可对角化, 且 A 和 B 相似, 则 A, B 与同一对角阵相似。

36 设三元二次型 $f = x^T Ax$ 经正交变换得标准形: $y_1^2 - 3y_2^2$, 若 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 和 $\beta = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

分别是 $(A - E)x = 0$, 和 $(3E + A)x = 0$ 的解, 求 $Ax = 0$ 的解, 以及 $|A + 2E| = ?$

37 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$, B 是3阶非零矩阵 且 $BA=0$;

求 (1) 矩阵 B ; (2)若 B 的第一列是 $(1, 2, -3)^T$ 时, 求 $(B - E)^4$

38 设 A 为3 阶实对称阵, $A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, 且 矩阵 $(A+3E)$ 不可逆,

(1)求 A 的特征值和特征向量; 并求正交矩阵 Q ,使得 $Q^T A Q = \Lambda$

(2) 若二次型 $x^T(A + kE)x$ 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2 - ky_3^2$, 求 k ?

39 设向量组 $\alpha_1 = (a, 2, 1)^T$, $\alpha_2 = (-2, 3, 2)^T$, $\alpha_3 = (-1, 1, 0)^T$, $\beta = (1, b, c)^T$

问当 a, b, c 满足什么条件时: (1) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 唯一线性表示;

(2) β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示;

(3) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 但表示式不唯一; 并求出表达式。

40 已知齐次线性方程组 (I) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = 0 \end{cases}$ 的通解为:

$k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, 求方程组 (II) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ 的通解。

41 设4元齐次线性方程组 (I) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$, 以及齐次方程 (II) 的通解为:

$$k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{问方程组 (I) 和 (II) 是否有非零公共解? 若有, 则求出.}$$

42 已知 线性方程组:
$$\begin{cases} x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + (2 - \alpha)x_2 + (2 + \beta)x_3 + 4x_4 = 1 \end{cases}$$

且 $(1, -1, 1, -1)^T$ 是该方程组的一个解,

求 (1) 方程组的通解; (2) 该方程组满足 $x_1 = x_3$ 的全部解。

43 设 A 是 n 阶矩阵, 且 $(A + E)^2 = 0$, 验证 A 是可逆的。

44 设 $\alpha = (-1, 0, 1)^T$, 矩阵 $A = \alpha \alpha^T$, 求 $|aE - A^n| = ?$

45 设 3 阶矩阵 A 与三维向量 x , 使得 x, Ax, A^2x 线性无关, 且 $A^3x = 2Ax - A^2x$;

记 $P = (x, Ax, A^2x)$ 求 3 阶矩阵 B , 使得 $P^{-1}AP = B$; 并求 $|A + E|$

46 证明存在正整数 N ,使得当 $M > N$ 时都有 $R(A^M) = R(A^N)$

47 设矩阵 $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$,若 a_1, a_2, a_3 线性无关, 且 $a_1 + a_2 = a_3 + a_4$
则方程组 $Ax = a_1 + 4a_4$ 的通解为()

48 证明若 n 阶方阵 A, B 相似, 且 $A^2 = A, (A + B)^2 = A + B$, 则 $AB = 0$

49 设 A 为 n 阶幂零矩阵, B 为 n 阶方阵, 且 $AB+BA=B$, 求证 $B=0$

50 已知矩阵 $AB = A+B$, 验证 $r(A)=r(B)$

51 两个矩阵 A, B 行数相同, A 行满秩, B 的列向量组是否可有 A 的列向量组线性表示?

52 设三阶矩阵 A 的某行元素都是 1, 且 向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

是 A 的特征向量,

问: 1) A 是否可对角化; 2) $\text{tr}(A)$?

53 用配方法化二次型为规范形, 并写出所用变换的矩阵

1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3;$

2) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3;$

3) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$

54 设3阶矩阵 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 其中 α_1, α_2 是 3 阶A对应特征值 -1, 1 的特征向量, 且:

$$(A - E)\alpha_3 - \alpha_2 = 0$$

(1) 证明 P可逆; (2) 计算 $P^{-1}A^*P$

55 设 A 为 n 阶方阵, 若 $r(A-E)+r(A+E)=n$, 证明: $A^2 = E$

56 设 A, B, C 是 n 阶方阵, 且有 $(A + E)C = 0$; $B(A^T - 2E) = 0$; $r(C) + r(B) = n$

证明: A 可对角化, 并给出对角阵。

57 对方阵 A, B , 若 $(E-AB)$ 可逆, 证明 $(E-BA)$ 也可逆

58 记 A 为元素全为 1 的矩阵, 若 $x^2 = A$, 求矩阵 x

59 若矩阵 A, B 都是正定矩阵, 且 $AB=BA$, 证明 AB 也是正定矩阵

60 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$

是 $\mathbb{R}^3$ 的两组基, 求在两组基下有相同坐标的向量。

Thank you

经纬考研数学

www.jingweimath.com